**ùTD 1**

Exo :

a, b dans Z

a = bq + r où 0 <= r < b

Mq PGCD(a, b) = PGCD(r, b)

c = PGCD(a, b) € N

d = PGCD(r, b) € N

Mq c | d

Il suffit de mq c est un diviseur commun de r et de b

c | b car c = PGCD(a, b)

r = a – bq c | a et c | b donc c | r

donc c | d

Mq d | c

Il suffit de mq d est une diviseur commun de a et de b

d | b car d = PGCD(r, b)

a = bq + r d | b et d | r donc d | a

donc d | c

Donc d = +- 1 = c € N

Exercice 4 :

1. 6471 = 123 \* 52 + 75

DE de 6471 par 123

a = bq + r

donc 6471 = 123 \* 52 + 75

DE de 6471 par 52

6471 = 52 \* 123 + 52 + 23 = 52 \* 124 + 23

1. PGCD(585, 247)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 585 | 247 | 91 | 65 | 26 | 13 |  |  |  |  |
| 91 | 65 | 26 | 13 | 0 |  |  |  |  |  |

PGCD(585, 247) = 13

Identité de Bezout :

585 = 247 \* 2 + 91

247 = 91 \* 2 + 65

91 = 65 \* 1 + 26

65 = 26 \* 2 + 13

91 = 585 – 247 \* 2

65 = 247 – 91 \* 2

26 = 91 – 65 \* 1

13 = 65 – 26 \* 2

13 = 65 – 26 \* 2

= 65 – (91 – 65 \* 1) \* 2

= (247 – 91 \* 2) – [91 – (247 – 91 \* 2) \* 1] \* 2

= [247 – (585 – 247 \* 2) \* 2] – {(585 – 247 \* 2) – [247 – (585 – 247 \* 2) \* 2] \* 1} \* 2

= 585 \* (-2 – 2 – 4) + 247 \* (1 + 4 + 4 + 2 + 8)

= 585 \* (-8) + 247 \* 19

PGCD(2006, 1789)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2006 | 1789 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Exercice 5 :

d € Z

Mq 12 = 4 \* 3 | d²(d – 1)(d + 1) = c

Il suffit de mq que 4 | c et 3 | c pour conclure car PGCD(4, 3) = 1

Mq 4 | c

1er cas : d pair

c = d²(d-1)(d+1)

impair impair

d = 2d’

d² = d’²

2e cas : d impair

(d - 1) pair donc divisible par 2

(d + 1) pair donc divisible par 2 2 \* 2 = 4

Mq 3 | c

c = d \* (d – 1) \* d \* (d + 1)

3 entiers consécutifs donc divisible par 3

d = 3q + r où 0 <= r < 3

Si r = 0 alors d est divisible par 3

Si r = 1 alors d – 1 = 3q est divisible par 3

Si r = 2 alors d + 1 = 3(q + 1) est divisible par 3

Donc 3 | c

Exercice 9 :

n € N

PGCD(2n² + 2n, 2n + 1) = 1

Mq les seuls diviseurs communs à (2n² + 2n) et (2n + 1) sont +- 1

Soit d | 2n² + 2n

d | 2n + 1

Pour tout r et s dans Z,

d | (2n² + 2n)r + (2n + 1)s

r = 1 d | n

s = -n

Enfin, d | 2n + 1 => d | 1

d | => d = +- 1

On cherche la DE de (2n² + 2n) par 2n + 1

2n² + 2n = (2n + 1) \* (cn + d) + (an + b)

c =/ 0

n >= 2 a, b dans Z

a--- = b---

a ≡ b[n]

On suppose que a--- = b---

Mq a ≡ b[n]

b ≡ b[n] (Reflexivité)

b € b--- = a---

b € a--- = {c € Z, c ≡ a[n]}

b ≡ a[n]

On suppose que a ≡ b[n]

Mq a--- = b---

Il s’agit d’une égalité entre deux ensembles

On procède par double inclusion

Mq a--- c b---

Soit c dans a---, mq c € b---

c ≡ a[n] => (par transitivité) c ≡ b[n] c € b---

a ≡ b[n]

Mq b--- c a---

Soit c dans b---, mq c € a---

c ≡ b[n]

a ≡ b[n] => (symétrie) b ≡ a[n] => (transitivité) c ≡ a[n] c € a---

Exo :

Trouver le reste r de la DE de 19891993 par 7

19891993 = 7q + r 0 <= r < 7

Dans l’ACU (Z / 7Z, +, \*),

19891993 = 7q + r

7q + r = 7q + r (def de + dans Z / 7Z) (mettre les barres please)

= 7 \* q + r

7 = 7 \* 1 + 0

7--- = 0---

7q + r = 0--- \* q--- + r--- = 0q + r (def de \*) = 0--- + r--- = r--- (0--- est le neutre pour +) (barres aussi)

19891993 = 1989 \* 1989 \* ……… \* 1989 1993 fois

= 1989--- \* 1989--- \* 1989--- \* …… 1993 fois

= 1989---1993 = 1---1993

1--- \* 1--- \* 1--- \* 1--- \* ……. 1993 fois = 1---

1989 = 7 \* 284 + 1

1989--- = 1---

Autre exo :

Trouver le reste de la DE de 19921993 par 7

19921993 = 7q + r 0 <= r < 7

Dans l’ACU (Z / 7Z, +, \*)

19921993 = r---

1992 = 7 \* 284 + 4

r--- = 4---1993

4---0 = 1---

4---1 = 4---

4---2 = 16--- = 2--- car 7 \* 2 + 2 = 16

4---3 = 4---2 \* 4--- = 2--- \* 4--- = 1---

4---4 = 4---

4---5 = 1---

4---n = 1--- si n € 3N

= 4--- si n € 3N + 1

= 2--- si n € 3N + 2

1993 = 3 \* 664 + 1

4---1993 = 4---3 \* 664 + 1

= 4---3 \* 664 \* 4---

= (4---3)664 \* 4---

= 1---664 \* 4---

= 1--- \* 4---

= 4---

Autre autre exo :

Mq V n € N, 7 | 32n + 1 + 2n + 2

Cela équivaut à démontrer que pour tout entier n naturel n, le reste de la DE de 32n + 1 + 2n + 2 par 7 vaut 0.

C’est-à-dire que dans l’ACU (Z / 7Z, +, \*),

32n + 1 + 2n + 2 = 0---

32n + 1 + 2n + 2 = 0---

3---2n + 1 + 2---n + 2 = 0---

Exercice 12 :

1. k € N
2. Mq 10k ≡ 1[3]

Dans l’ACU (Z/3Z, +, \*), mq 10k = 1---

10--- = 1--- car 10 = 3 \* 3 + 1

10k = 10---k = 1---k = 1---

1. Mq 10k ≡ 1[9]

Same car 10--- = 1--- dans Z/9Z

10 = 9 \* 1 + 1

1. Mq 10k ≡ (-1)[11]

Dans (Z/11Z, +, \*), 10--- = -1---

10 = 11 – 1

1. (Z/2Z, +, \*), 10--- = 0---

En effet, 10 = 5 \* 2

10--- = 5--- \* 2--- = 5--- \* 0--- = 0---

10---0 = 1---Pour k >= 1, 10---k = 0---k = 0---

Dans R, xy = 0 => x = 0 ou y = 0

Dans Z/4Z, 10--- x 10--- = 0---  
10--- =/ 0---

10k = …

1mod 2 si k = 0  
0 mod 2 si k =/ 0

1 mod 3

1 mod 4 si k = 0  
2 mod 4 si k = 1  
0 mod 4 si k >= 2

1 mod 5 si k = 0  
0 mod 5 si k >= 1

1 mod 9

(-1)k mod 11

1. Ex : 1628 = 8 + 20 + 600 + 1000

= 8 \* 100 + 2 \* 101 + 6 \* 102 + 1 \* 103

a0 a1 a2 a3

1628--- = 8--- + 2 \* 10 + 6 \* 10² + 1 \* 103

= 8---

1. n ≡ a0[2] dans (Z/2Z, +, \*),

n--- = ak--- \* 10---k + ak-1--- \* 10---k-1 + … + a1--- \* 10--- + a0---

n--- = a0--- Ainsi, n divisible par 2 ⬄ a0 pair

1. n ≡ a0[5] dans (Z/5Z, +, \*),

n--- = a0--- Ainsi, n divisible par 5 ⬄ a0 = 0 ou 5

1. n ≡ a0 + 10a1[4]

n--- = ak--- \* 10---k + ak-1--- \* 10---k-1 + … + a1--- \* 10--- + a0---

= a0 + 10a1

4 | n ⬄ 4 | a0 + 10a1

Exercice 15 :

(Z/6Z, +, \*)

Z/6Z = {0---, 1---, 2---, 3---, 4---, 5---} = {-2---, -1---, 0---, 1---, 2---, 3---}

4--- = -2---  
5--- = -1---

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| + | -2--- | -1--- | 0--- | 1--- | 2--- | 3--- |
| -2--- | 2--- | 3--- | -2--- | -1--- | 0--- | 1--- |
| -1--- | 3--- | -2--- | -1--- | 0--- | 1--- | 2--- |
| 0--- | -2--- | -1--- | 0--- | 1--- | 2--- | 3--- |
| 1--- | -1--- | 0--- | 1--- | 2--- | 3--- | -2--- |
| 2--- | 0--- | 1--- | 2--- | 3--- | -2--- | -1--- |
| 3--- | 1--- | 2--- | 3--- | -2--- | -1--- | 0--- |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -2--- | -1--- | 0--- | 1--- | 2--- | 3--- |
| -2--- | -2--- | 2--- | 0--- | -2--- | 2--- | 0--- |
| -1--- | 2--- | 1--- | 0--- | -1--- | -2--- | 3--- |
| 0--- | 0--- | 0--- | 0--- | 0--- | 0--- | 0--- |
| 1--- | -2--- | -1--- | 0--- | 1--- | 2--- | 3--- |
| 2--- | 2--- | -2--- | 0--- | 2--- | -2--- | 0--- |
| 3--- | 0--- | 3--- | 0--- | 3--- | 0--- | 3--- |

Calcul d’ordre

Ordre de 2--- : on cherche le plus petit entier naturel non nul n tq n \* 2--- = 0---

1 \* 2--- = 2--- =/ 0--2 \* 2--- = 2--- + 2--- = 4--- =/ 0---  
3 \* 2--- = 2 \* 2--- + 2--- = 4--- + 2--- = 6--- = 0---  
2--- est d’ordre 3.

0--- est le seul élément d’ordre 1  
1 \* 0--- = 0---

-2--- a le même ordre que 2---

Ordre de 3--- :  
1 \* 3--- = 3--- =/ 0---2 \* 3--- = 3--- + 3--- = 6--- = 0---  
3--- est d’ordre 2.

Ordre de 1--- :  
1\* 1--- = 1--- =/ 0---  
2 \* 1--- = 1--- + 1--- = 2--- =/ 0---  
3 \* 1--- = 2 \* 1--- + 1--- = 2--- + 1--- = 3--- =/ 0---  
…  
6 \* 1--- = 6--- = 0---  
1--- est d’ordre 6.

Exercice 16 :

n >= 1  
k € Z

1. k et n sont premiers entre eux
2. k--- est d’ordre n

On a déjà vu que dans Z/6Z, ± 1---  
sont les seuls éléments d’ordre 6

ii) => i)

1 \* k--- =/ 0---  
2 \* k--- =/ 0---  
3 \* k--- =/ 0  
…  
(n – 1) \* k--- =/ 0  
n \* k--- = 0---

2 à 2 distincts



H = {1k---, 2k---, … , (n – 1)k---} c Z/nZ

H est de cardinal (n – 1)

Par l’absurde : il existe 1 <= i =/ j <= n – 1 tq i \* k--- =/ j \* k---

Par ex, i < j  
 0--- = j \* k--- - i \* k--- = (j – i) \* k--- PAS POSSIBLE



1 <= j – i < n

Mq k et n sont premiers entre eux  
On va trouver deux entiers u et v tq :  
 ku + vn = 1

et on conclut par Bezout

1--- € Z/nZ

Il existe 1 <= u <= n – 1,

1---= u \* k--- = uk

Donc 1 ≡ uk[n]  
donc il existe v tq 1 = uk + vn

i) => ii)

On suppose PGCD(k, n) = 1

Mq k--- est d’ordre n

Réflexe : Bezout

uk + vn = 1  
uk + vn = 1---  
uk = 1---

Par ex, u > 0 (quitte à considérer -k--- au lieu de k---)

u \* k--- = 1--- € Z/nZ

Z/nZ = {0---, 1 \* 1---, 2 \* 1---, … , (n – 1) \* 1---

u \* k---



Z/nZ = {0---, uk---, 2uk---, … , (n – 1)uk---}

[uk---, … , (n – 1)uk---} = {k---, … , (n – 1)k---

**TD 2**

Exercice 1 :

x = a/b

1. 0.3 = 0.333333…  
   a0 = 0 et ak = 3 pour k >= 1  
   xn = a0, a1a2 … an = a0 + a1/10 + a2/10² + … + an/10n =   
   xn <= x < xn + 1/10n  
   En particulier, xn -------------> x  
    x -> +∞  
     
   Calcul explicite de xnxn = 3 = 3 \* (1/10)1 \* (1 – (1/10)n-1+1)/(1 – 1/10) = 1/3 \* (1 – (1/10)n) --------> 1/3  
    n -> +∞  
   OU  
   x = 0.3  
   => 10x = 3.3  
   => 10x – x = 3.3 – 0.3  
    (10 – 1)x = 3  
   => x = 3/9 = 1/3
2. 0.18 = 0.1818181818…  
   a0 = 0 et ak = 1 si k impair, ak = 8 si k pair  
   xn =   
   xn =

= k = 2l

COURS :  
x € R  
La partie entière de x est l’unique entier relatif k tq  
k <= x < k + 1  
On le note k =

Nik leggo l’autre technique

x = 0.181818181818…  
10²x = 18,18181818181818….  
(10² - 1)x = 18  
x = 18/99

1. x = 0.135135135135135…  
   103x = 135.135135135135135…  
   (103 – 1)x = 135  
   x = 135/999
2. x = 0.123456787878…  
   x = 0.123456 + 0.000000787878…  
   x = 123456/106 + 0.787878…/106

**Exercice 2**

Q est archimédien  
V x € Q+\*, V y € Q, Ǝ n € N  
nx > y

1) x = a/b y = c/d a, b, c et d dans Z+\*

a) n € N nx > y <=> nad > bc

Puisque dénominateurs > 0 :  
nx > y <=> n(a/b) > c/d <=> nad > bc

b) bc = qad + r 0 <= r < ad DE de bc par ad  
Montrer que (q + 1)ad > bc

(q + 1)ad > bc <=> qad + ad > bc donc qad + ad > qad + r = bc

2)   
1er cas : y < 0

y < 0 < 1x = x  
n = 1 convient  
  
2e cas : y > 0

h = q + 1 convient où q = quotient de la DE de bc par ad  
b) (q + 1)ad > bc  
a) (q + 1)x > y

3)

a) V e > 0, Ǝ N € N\*, 1/N < e

Soit e > 0  
Selon la question 2) avec x = 1 et y = E(1/e) + 1  
Ǝ N € N tq N \* 1 > E(1/e) + 1 >= 1/e

b) Mq V n € N, 10n >= n  
En déduire V e > 0, Ǝ N € N\*, 1/10N < e

pour n = 0, 100 = 1 >= 0  
pour n = 1, 101 = 10 >= 1  
pour n >= 0 -> n + 1, on suppose que 10n >= n pour un entier n >= 0  
Mq 10n+1 >= n + 1 H R(n) ? NON à cause de n = 0  
10n+1 = 10 \* 10n >= 10n >= n + 1  
pour n >= 1 -> n + 1, on suppose que 10n >= n pour un entier n >= 1  
Mq 10n+1 >= n + 1 H R(n) ? OUI  
10n+1 = 10 \* 10n >= 10n >= n + 1

Soit e > 0  
Selon a), Ǝ N dans N\*,  
Selon b), 1/N < e  
1/10N <= 1/N < e  
De plus, pour n >= N,  
1/10n <= 1/10N < e  
cad limn->+∞ 1/10n = 0

**Exercice 3**

1. 1/7 = a0,a1a2a3… = a0 + a1/10 + a2/102 + a3/1031 = 7 \* 0 + 1  
   a0 = 0 ; r0 = 1  
   10r0 = 7 \* 1 + 3 a1 = 1 ; r1 = 3  
   10r1 = 7 \* 4 + 2 a2 = 4 ; r2 = 2  
   10r2 = 7 \* 2 + 6 a3 = 2 ; r3 = 6  
   10r3 = 7 \* 8 + 4 a4 = 8 ; r4 = 4  
   10r4 = 7 \* 5 + 5 a5 = 5 ; r5 = 5  
   10r5 = 7 \* 7 + 1 a6 = 7 ; r6 = 1  
   10r3 = 7 \* 1 + 3 a7 = 1 = a1  
   Donc 1/7 = 0.142857…  
     
   3/7  
   3 / 7 = 0 + 3 a0 = 0 ; r0 = 3  
   a1 = 4 ; r1 = 2  
   a2 = 2 ; r2 = 6  
   a3 = 8 ; r3 = 4  
   a4 = 4 = a1  
   Donc 3/7 = 0.428…  
     
   22/7  
   22 = 7 \* 3 + 1 a0 = 3 ; r0 = 1  
   a1 = 1 ; r1 = 3  
   a2 = 4 ; r2 = 2  
   a3 = 2 ; r3 = 6  
   a4 = 8 ; r4 = 4  
   a5 = 5 ; r5  = 5  
   a6 = 7 ; r6 = 1  
   a7 = 1 = a1  
   Donc 22/7 = 3.142857…
2. Plus petit n =/ 0, 10n ≡ 1[7]  
   Dans l’ACU (Z/7Z, +, \*)  
   10---0 = 1---  
   10---1 = 10--- = 3---  
   10---2 = 3--- \* 3--- = 9--- = 2---  
   10---3 = 3--- \* 2--- = 6---  
   10---4 = 6--- \* 3--- = 18--- = 4---  
   10---5 = 5---  
   10---6 = 15--- = 1—
3. 6 est la période des résultats du 1) (= 6 chiffres après la virgule avant répétition)
4. PGCD(1, 7) = PGCD(3, 7) = PGCD(22, 7) = 1  
   PGCD(7, 10) = 1  
     
   On suppose que PGCD(b, 10) = 1  
   Mq il existe n € N\*, 10n ≡ 1[b]  
    10---n = 1--- dans Z/bZ  
   C’est l’analogue multiplicatif de Ǝ n € N\*, n10--- = 0--- dans Z/bZ  
     
   Point clé  
   {k10---, k € N\*} c Z/bZ (ensemble fini)  
   Donc ensemble fini  
   donc Ǝ k =/ l dans N\*, k10--- = l10---  
   Par exemple, k < l  
   l10--- - k10--- = 0---  
   (l – k)10--- = 0---  
     
   {10---k, k € N\*} c Z/bZ  
   Ǝ k =/ l dans N\*, 10---k = 10---1  
   Par exemple, k < l  
   10---l – 10---k = 0---  
   10---k(10---lk – 1) = 0---  
   Bezout : ub + 10v = 1  
   ub + 10v = 1  
   ub + 10v = 1--- dans Z/bZ  
   10--- \* v--- = 1---  
     
   10---k(10---lk – 1---) = 0---  
   On multiplie par v---k  
   v--- \* 10---k(10---lk – 1---) = v---k \* 0--- = 0---  
   10---lk – 1--- = 0---  
   10---lk = 1---  
     
   n0 = min({n € N\*, 10---n = 1---})  
   10---1 =/ 1  
   …..  
   10---n0-1 =/ 1  
   10---n0 = 1  
   Mq si PGCD(10, b) = 1 alors 1/b = a0, a1a2…an0  
   1/b = 0, a1a2…an0 de période n0  
   (ex : 0.345345… = 0.345… -> période 3 PAS 6)  
     
   10n0x = a1a2…an0, an0+1an0+2…an0+n0  
   y = 10n0x – x € Z  
   y = (10n0 – 1) \* 1/b  
   10n0 = 1--- donc Ǝ k € Z,  
   10n0 – 1 = kb  
   (10n0 – 1)/b = k € Z

**Exercice 5 :**

1. Tend vers 3
2. Tend vers -∞
3. Tend vers 2
4. Tend vers 0 Théorème des gendarmes !!!
5. Tend vers 0

**Exercice 7 :**

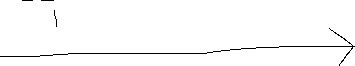
1. Tend vers 1
2. Tend vers 0
3. wn = -   
   wn = ( - )( + )/( + )  
   wn = 1/( + ) ----> 0+

**Exercice 9 :**

1. un converge, wn converge, un <= vn <= wn => vn converge ? Faux si un et wn n’ont pas la même limite.
2. un diverge, vn diverge => un + vn diverge ?  Faux
3. un converge => un monotone ? Faux
4. un diverge => un pas bornée ? Faux, ex : un = (-1)n
5. un bornée => un converge ? Faux, ex : un = (-1)n
6. un > 0, un --> l => l > 0 ? Faux
7. un > 0, un --> 0 => un décroissante ? Faux
8. un > 0, un pas majorée => un --> +∞
9. Vrai
10. un >= 0, un décroissante => un --> 0 ? Faux

**Exercice 11 :**

1. u1 = f(u0) = f(2) = = 2  
   u2 =   
     
   f’(x) = 1/2 > 0 pour x > -6  
   x -6 +∞  
     
   f’(x) +  
     
   f(x) +∞  
    0
2. Oof



1. Mq u est maj par 3, V n € N, un <= 3  
   Récurrence sur n >= 0  
     
   n = 0 u0 = 2 <= 3 OK  
     
   n -> n + 1  
   On suppose que un <= 3  
   Mq un+1 <= 3  
     
   f est croissante donc  
   f(un) <= f(3)  
   un+1 <= 3
2. Mq u est croissante, V n € N, un <= un+1  
   Récurrence sur n >= 0  
     
   n = 0 u0 = 2, u1 = 2 u0 <= u1  
     
   n -> n + 1  
   On suppose que un <= un+1  
   Mq un+1 <= un+2  
     
   f est croissante  
   un <= un+1f(un) <= f(un+1)  
   un+1 <= un+2
3. u est croissante et maj par 3 donc (TLM)  
   limn->+∞ un = l <= 3  
   un+1 = f(un) =   
     
   l   
     
   Unicité de la limite  
   l =   
   l = f(l)  
   l = 3

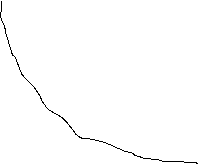


**Exercice 13**

1. un = 1 + 2/3 + … + (2/3)n  
   Mq u converge  
   Somme d’une suite géo de raison 2/3  
   = (2/3)0 \* (1 - (2/3)n-0+1)/(1 - 2/3) = 3(1 – (2/3)n+1) ---> 3(1 – 0) = 3
2. vn = 1/(1 \* 2) + 1/(2 \* 3) + … + 1/n(n + 1)  
   Mq v converge  
   Somme …..  
   1/k(k + 1) = 1/k – 1/(k + 1)  
   Nik les sommes  
   un = 1/1 – 1/(n + 1) ---> 1

**Exercice 15**

1. mq que pour tout k >= 2  
   1/k² < 1/(k(k – 1)) = 1/(k – 1) – 1/k  
     
   k(k – 1) < k² ?  
   k² - k < k² ? OUI
2. mq que Sn converge  
   Somme de nombres positifs donc Sn croissante  
   Donc converge  
     
   Autre méthode  
     
     
     
     
     
     
     
     
     
     
     
     
     
   f(k) = surface jaune <= surface verte =   
    = surface rouge  
     
   Et nik



**Exercice 16**

1. Pour n = 1  
   u2 = u1 + 1/(2 + 1) = 1 + 1/2 = 3/2  
   avec la somme :  
   u1 = 1, u2 = 1/1 + 1/2 = 3/2  
     
   pour n >= 1  
   Flemme mais c’est ok
2. Somme de nombres positifs, donc strictement croissante
3. vn – un = - = GEKOMPRI TKT
4. vn – un >= 1/2   
   Pour n + 1 <= k <= 2n, 1/k >= ?  
   1 minoré par 1  
   k majoré par 2n  
   donc 1/k >= 1/2n  
     
   avec n = 1, vn – un = 1/2   
   et comme suite croissante  
   alors vn – un >= 1/2n >= 1/2   
   vn – un >= 1/2 (\*)  
     
   Alors c’était une autre technique mais pakompri  
   Mais isoké btw
5. un --> l alors (résultat admis)  
   u2n – un --> l – l = 0  
   Passage à la limite dans (\*) 0 >= 1/2 NON
6. Tend vers +∞
7. ????????????????

**Exercice 17**

1. vn+1 – vn = - =   
   wn+1 – vn = - =   
   Aller hop tamer
2. v et w converge, donc u converge
3. + (-x)n/(1 + x)
4. =   
   prenons k’ = k + 1  
    = un  
   Plop comprends pas la suite
5. Pour n >= 1  
   |zn| <=   
    <= <=   
   soon au chomage aller lets go
6. Avec le théorème d’encadrement  
   passage à la limite : ln(2) = l + 0  
   ça j’ai capté mais flemme énorme

**Exercice 18**

1. bn – an = 1/(n \* n!) --> 0  
   an+1 – an = 1/(n+1)! > 0  
   bn+1 – bn = -1/(n(n+1)(n+1)!)  
   (an) et (bn) sont des suites adjacentes donc selon le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers le même nombre réel l.  
   De plus, l est l’unique nombre réel vérifiant V n >= 1, an <= l <= bn
2. Fait admis : l = e = e1 ≈ 2.71  
   Objectif : e € Q (= e pas un nombre rationnel)  
     
   Par l’absurde : e € Q  
   e = p/q p € N\* et q € N\*  
     
   Mq q!aq <= p(q – 1)! <= q!aq + 1/q  
     
   On choisit n = q  
   aq <= p/q <= aq + 1/qq!  
   q!aq <= p \* q!/q <= q!aq + 1/q  
   aq = € Q  
     
   0 <= p(q – 1)! – q!aq <= 1/q  
     
   1er cas : q > 1 <=> q >= 2  
   \* aq+1 <= e car V n >= 1, an <= e <= bn  
   \*\* aq+1 > aq = e car an croissante  
     
   2e cas : q = 1 e = p € N\*  
   1 <= p <= 2 => e = 1 (pour p = 1) ou e = 2 (pour p = 2)  
   r compri frèr

**TD 3**

**Exercice 1**

f : N --> N  
 n --> f(n) = 3n  
  
injective, surjective ou bijective ?  
  
(\*)  
Soit y dans N  
y = f(n) = 3n (1)  
n € N (2)  
  
On résout (1) <=> n = y/3  
Condition 2 : y/3 € N <=> 3 | y  
Si 3 | y alors (\*) admet une unique solution  
Sinon (\*) n’admet pas de solution  
  
f injective  
car pour tout y dans N, (\*) admet au plus une solution  
  
f pas surjective  
car 1 = f(n) n’admet pas de solution  
n € N  
  
f pas bijective  
car pas surjective

**Exercice 2**

f : R --> R  
 x --> f(x) = x²  
g : R --> R  
 x --> g(x) = x3

(\*)  
Soit y dans R  
y = f(x) = x² (1)  
x € R (2)  
  
Si y < 0, alors (1) donc (\*) n’a pas de solution  
Sinon si y >= 0, alors (1) √y = √x² = |x|  
pour y = 0, une seule solution  
pour y > 0, deux solutions  
  
donc f ni injective, ni surjective, ni bijective

(\*\*)  
Soit y’ = g(x) = x3 (1)  
x € R (2)  
  
y = x3 <=> y1/3 = (x3)1/3 = x € R  
(\*\*) admet une unique solution donnée par x = y1/3   
donc g bijective

**Exercice 3**

1. ?
2. 1/(x² + 1) = 1/2  
   x² + 1 = 2  
   x² = 1  
   x = 1 ou x = -1  
   Elle n’est pas injective.
3. y = h(x)  
   y = -2x + 3  
   x = (3 – y)/2  
   L’équation admet une unique solution donc elle est bijective  
   h-1 : R -> R  
    y -> (3 – y)/2

**Exercice 6**

1. Soit Y dans Z/nZ  
   (\*) Y = f(x)  
    x € Z  
   Soit l dans Z un représentant de Y  
   Y = l---   
   On cherche les entiers relatifs x tq  
   l--- = x---  <=> x ≡ l[n]  
    x = l + nm où m € Z  
   Les solutions de (\*) sont {l + nm, m € Z} = l + nZ  
   Donc l’équation admet au moins une solution => surjective
2. A = Ø

**Exercice 7**

fa : Z/nZ -> Z/nZ  
 X -> X + a---

Rappel : X = k--- et Y = l--- dans Z/nZ  
 X + Y = k--- + l--- XY = k--- \* l---

1. fa o fb = fa+b  
   fa et fb ont le même ensemble de départ, Z/nZ  
   fa et fb ont le même ensemble de d’arrivée, Z/nZ

Pour X dans Z/nZ  
fa+b(X) = X + a--- + b---  
(fa o fb)(X) = fa(fb(X)) = a--- + (X + b---) = X + a--- + b---

1. Mq fa est bijective  
   fa o f-a = fa-a = f0 = identité  
   f-a o fa = f-a+a = f0 = id  
   Donc selon le cours, fa bijective avec fa-1 = f-a

**Exercice 8**

FA : Z/nZ -> Z/nZ  
 X -> AX

1. n = 3 Z/3Z = {0---, 1---, 2---}  
   f1-- : Z/3Z -> Z/3Z  
    0--- -> 0--- 1--- -> 1--- 2--- -> 2---f1-- = idZ/3Z donc bijective  
   f-11-- = f1--  
     
   f2-- : Z/3Z -> Z/3Z  
    0--- -> 0--- 1--- -> 2--- 2--- -> 4---f-12-- = f2--  
     
   n = 4 Z/4Z = {0---, 1---, 2---, 3---}  
   f1-- : Z/4Z -> Z/4Z  
    0--- -> 0--- 1--- -> 1--- 2--- -> 2--- 3--- -> 3---f1-- = idZ/4Z donc bijective  
   f-11-- = f1--  
     
   f2-- : Z/4Z -> Z/4Z  
    0--- -> 0--- 1--- -> 2--- 2--- -> 0--- 3--- -> 2---
2. n premier  
   Mq fA est injective  
   Soient X et Y dans Z/nZ tq  
   fA(X) = fA(Y)  
     
   Mq X = Y  
   A = a---  
   X = k---  
   Y = l---  
   a, k, l dans Z  
   ak = al donc   
   ak ≡ al[n]  
   a(k – l) ≡ 0[n]  
   n | a(k – l)  
     
   Lemme d’Euclide  
   n | a(k – l) => n | a ou n | (k – l)  
   n premier  
     
   1er cas : n | (k – l)  
   k – l = 0---  
   k--- = l---  
   X = Y  
     
   2e cas : n | a  
   a--- = 0---  
   A = 0--- NON  
     
   Donc fA est injective  
     
   Mq fA est bijective  
   Im(fA) = {A \* 0---, A \* 1---, …, A \* n – 1} c Z/nZ  
    ensemble de cardinal n  
   Im(fA) = Z/nZ  
     
   Donc fA surjective  
     
   Puisque injective et surjective => bijective



1. n pas premier  
   on cherche A € Z/nZ tq fA pas bijective  
     
   n pair >= 4  
   n = 4 Z/4Z  
   f2—pas injective car f2—(0---) = f2—(2---) = 0---  
   f2—(n---/2) = 2--- \* n---/2 = n--- = 0--- = f2—(0---) => pas inj

**Exercice 10**

f : R² --> R²  
(x, y) --> (2x – 3y, -7x + y)  
  
Soit (u, v) dans R²  
(\*) (u, v) = f(x, y) = (2x – 3y, -7x + y)  
 (x, y) € R²  
  
u = 2x – 3y  
v = -7x + y

u = 2x – 3(v + 7x)  
y = v + 7x  
  
x = (-1/19)(y + 3v)  
y = v + 7x  
  
Ainsi,  
y = v + 7((-1/19)(u + 3v))  
y = (-1/19)(7u + 2v)  
  
(\*) admet une unique solution donnée par (x, y) = ((-1/19)(u + 3v), (-1/19)(7u + 2v))  
Donc f est bijective avec   
  
f-1 : R² --> R²  
 (u, v) --> ((-1/19)(u + 3v), (-1/19)(7u + 2v))

**Exercice 11**

1. (g o f)(x) = g(f(x))  
    = g(x, 2x + 1)  
    = x² + 2x + 1
2. (g o f)(x) = (x + 1)² >= 0  
   L’équation  
   -1 = (g o f)(x)  
   x € R  
   n’a pas de solution de g o f, pas surjective

**Exercice 13**

1. f(1) = (-1, 4)  
   g(-1, 0) = -1
2. f-1({{-9, 4)}) = {x € R, f(x) = (-9, 4)}  
   -2x + 1 = -9 => x = 5  
   (x – 3)² = 4 => x = 5 et x = 1  
     
   => x = 5  
   f-1({(-9, 4)}) = 5
3. A = R \* ]-∞ ; 0[ c R²  
    = {(x, y) € R², y < 0}  
   f-1(A) = {x € R, f(x) = A}  
    = {x € R, (-2x + 1, (x – 3)²) € A}  
    = {x € R, (x – 3)² < 0}  
    = Ø  
   f n’est pas surjective  
   En effet, l’équation f(x) = (3, -2), x € R, n’a pas de solution  
   f-1({(3, -2)}) = Ø
4. Mq f est injective  
   Soit (y, z) dans R²  
   On considère (\*) f(x) = (y, z)  
    x € R  
   -2x + 1 = y (1)  
   (x – 3)² = z (2)  
     
   1er cas : z < 0, (\*) n’a pas de solution car (2) n’a pas de solution  
   2e cas : z >= 0, (1) assure que x = (1 – y)/2  
    ((1 – y)/2 – 3)² = z  
   L’unique solution de (\*) est (1 – y)/2  
    ((1 – y)/2 – 3)² =/ z  
   (\*) n’admet pas de solution
5. g(0, z) = 4z (1)  
   Mq g est surjective  
     
   Soit t dans R  
   Mq l’équation (\*) g(y, z) = t  
    (y, z) € R²  
   admet au moins une solution  
   En effet, (y, z) = (0, t/4) est une solution de (\*) selon (1)
6. g injective ?  
   g(y, z) = g(-y, z)  
     
   Non car g(1, 0) = g(-1, 0) = 1
7. g o f : R --> R  
    x --> (g o f)(x) = -(-2x + 1)² + 4(x – 3)² = -20x + 35
8. g o f bijective ?  
   Soit y dans R  
   (\*) (g o f)(x) = y  
    x € R  
   -20x + 35 = y  
   x = (35 – y)/20 est l’unique solution de (\*)  
   (g o f)-1 : R --> R  
    x --> (35 – y)/20

**Exercice 17**

f : Z --> Z  
 k --> k² + k + 1  
Soit l dans Z  
(\*) f(k) = l  
 k € Z

1. k² + k + 1 = l  
   k² + k + 1 – l = 0  
   ∆ = 1² - 4 \* 1(1 – l)  
    = 4l – 3  
     
   1er cas : 4l – 3 < 0 <=> l < 3/4 <=> l <= 0  
   (\*) n’a pas de solution   
     
   2e cas : 4l = 3 <=> l = 3/4  
   impossible car l € Z  
     
   3e cas : 4l – 3 > 0 <=> l > 3/4 <=> l >= 1  
   k1 = (-1 - )/2 et k2 = (-1 + )/2  
   Remarque : k1 € Z => k2 € Z  
    k2 € Z => k1 € Z  
   Sous-cas 1 : k1 et k2 sont dans Z,  
   (\*) admet deux solutions  
   Sous-cas 2 : k1 €/ Z <=> k2 €/ Z  
   (\*) n’admet pas de solution  
     
   Finalement f ni injective, ni surjective, donc pas bijective non plus

**Exercice 18**

f : N --> N  
 n --> 2n  
  
g : N --> N  
 n --> [n/2]

1. Soit l dans N  
   (\*) f(n) = l <=> n = l/2  
    n € N  
     
   1er cas : l pair  
   n = l/2 est l’unique solution de (\*)  
     
   2e cas : l impair  
   (\*) n’admet pas de solution  
     
   f injective mais pas surjective => pas bijective  
     
   Soit l dans N  
   (\*) g(n) = l  
    n € N  
   [n/2] = l  
     
   Ex :  
   l = 0  
   n = 0 et 1 sont solutions |0/2] = 0 ; [1/2] = 0  
     
   g pas injective => pas bijective
2. g o f : N --> N  
   f o g : N --> N  
     
   (g o f)(x) = 2n/2 = n = idN ==> bijective  
   (f o g)(x) = 2[n/2]

**TD 4**

**Exercice 10**

Cercle de centre ω de rayon r >= 0  
|z – ω|² = r²  
|z|² + |-ω|² + 2Re(z \* -ω) = r²  
zz – zω – zω + |ω|² - r² = 0



1. Cercle de centre -1 – i et de rayon 3  
   |z + 1 + i| = 3  
   zz – z(-1 + i) + z(1 + i) + 2 – 9 = 0



1. zz + iz – iz – 3 = 0  
   ω = i |ω| = 1 -3 = |ω|² - r²  
   r = 2 -3 = 1 – r²  
    r² = 4



1. Cercle de diamètre [A, B] avec A = 4 + i et B = 1 – 3i  
   r = (1/2)|A – B| = 5/2  
     
   ωB = (1/2)AB  
   B – ω = (1/2)(B – A)  
   ω = B – (1/2)(B – A)

**Exercice 12**

ax + by = c  
  
ωz + ωz = k  
ω = a + ib  
k = 2c



1. y = 4x – 2  
   a = 4  
   b = -1  
   c = 2  
   (4 + i)z + (4 – i)z = 4  
     
   Droite passant par 4 + i (4, 1)  
    1 – 3i (1, -3)  
   y = αx + β  
   zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzZZZZzzzzz



1. ?
2. ??
3. (1 + 2i)z + (1 – 2i)z + 4 = 0  
   ?x + ?y = ?  
   z = x + iy  
   => (1 + 2)(x – iy) + (1 – 2i)(x + iy) + 4 = 0 => x + 2y = -2



**Exercice 15**

1. z3 = 8i = 8eiπ/6 = 23(eiπ/6)3 = (2eiπ/6)3 (\*)  
   z1 = 2eiπ/6 est une solution particulière de (\*)  
   z1 = 2(√3/2 + (1/2)i) = √3 + i  
   ZZZZZZZZZZZZZzzzzzzzzzzzzzzzzzzzZZZZZZZZZZZ  
   z2 = -2i  
   z3 = -√3 + i  
     
   Autre méthode :  
   z3 = 8i (\*)  
   Etape 1 :   
   z1 = √3 + i est une solution particulière de (\*)  
   Etape 2 :  
   Soit z une solution de (\*)  
   z3 = 8i (1)  
   z13 = 8i =/ 0 (2)  
   (1)/(2) z3/z13 = 8i/8i  
    (z/z1)3 = 1  
   z/z1 € R3 = {e2ikπ/3, 0 <= k <= z}  
     
   k = 0  
   z/z1 = 1 <=> z = z1  
     
   k = 1  
   z/z1 = e2iπ/3 = -1/2 + i(√3/2)  
   z = (√3 + i)(-1/2 + i(√3/2))  
   z = gékapté  
     
   k = 2  
   …………………………  
   z = Oui
2. Same avec z4 = (-1/4)i
3. (z + 1)4 = -16  
   y = z + 1 <=> z = y – 1  
   y4 = -16 = 16eiπ  
   Solution particulière y1 = 161/4eiπ/4 = √2(1 + i)  
   y/y1 € R4 = {-1, 1, -i, i}  
   HMMMMMMMM

**Exercice 18**

1. zn = z pour n >= 2 (\*)  
   -> z = 0 est une solution évidente  
   -> Soit z une solution différente de 0  
   |zn| = |z|  
   |z|n = |z| (=/ 0)  
   |z|n-1 = 1  
   |z| = 1  
   z =/ 0 solution de (\*) => |z| = 1 => z = 1/z  
   (\*) zn = 1/z  
    zn+1 = 1  
    z € Rn+1  
   L’ensemble des solutions de (\*) est {0} U Rn+1



1. 1 + 2z + 2z2 + … + 2zn-1 + 2zn = 0 pour n >= 1 (\*)  
   z =/ 1 car 1 n’est pas solution de (\*)  
   -1 – zn = 2(z + z2 + … + zn-1) = 2() = 2z(1 – zn-1)/(1 – z)  
   -(1 + zn) = 2z(1 – zn-1)/(1 – z)  
   On multiplie par 1 – z  
   -(1 – zn)(1 – z) = 2z(1 – zn-1)  
   -1 – zn + z + zn+1 = 2z – 2zn  
   zn+1 + zn – z – 1 = 0  
   z = -1 est une solution particulière  
   (z + 1)(zn – 1) = 0 (\*)  
   Soit z + 1 = 0 ie z = -1  
   Soit zn – 1 = 0 ie z € Rn\{1}  
   L’ensemble des solutions de (\*) est {-1} U Rn\{1}

**Exercice 20**

a € C  
|a| = 1  
Soient z1, … , zn les solutions de zn = a = eiθ (\*) (θ € R)  
Mq (1 + z1)n, … , (1 + zn)n sont alignés.  
  
Résoudre (\*)  
Solution particulière : z1 = eiθ/nAutres solutions :  
zk = z1e2ikπ/n = eiθ/ne2ikπ/n = ei(θ + 2kπ)/n  
L’ensemble des solutions de zn = a = eiθ est {zk = ei(θ + 2kπ)/n, 0 <= k <= n – 1}  
1 + zk = 1 + ei(θ + 2kπ)/n  
IMPORTANT : (eiy – e-iy)/2 = cos(y) et (eiy – e-iy)/2i = sin(y)

--------------------------------------------------------  
a = eiθ  
zn = a (\*)  
  
1e étape : On cherche une SP  
z1 = eiθ/n =/ 0 z1n = a  
  
2e étape : tonper  
--------------------------------------------------------  
Euler  
a, b dans R  
eia + eib = ei((a+b)/2)(ei(a-(a+b)/2) + ei(b-(a+b)/2)) = ei((a+b)/2)(ei((a-b)/2) + e-i((a-b)/2)) = ei((a+b)/2)(2cos((a-b)/2))  
  
pour 1 <= k <= n  
1 + zk = 2cos((2kπ+θ)/2n)ei(2kπ+θ)/2n  
(1 + zk)n = 2ncos((2kπ+θ)/2n)nei(2kπ+θ)/2  
  
(1 + z1)n = 2ncos(θ/2n)neiθ/2 = T1  
(1 + z2)n = 2ncos((2π+θ)/2n)nei(2π+θ)/2 = T2  
…  
(1 + zk)n = 2ncos((2kπ+θ)/2n)nei(2kπ+θ)/2 = Tk

…  
(1 + zn)n = 2ncos((2nπ+θ)/2n)nei(2nπ+θ)/2 = TnUn argument de T1  
1er cas : θ ≡ nπ [π]  
 (1 + z1)n = 0  
2e cas : θ ≡ nπ [π]  
 cosn(θ/2n) > 0  
 |T1| = 2ncosn(θ/2n)  
 un argument : θ/2  
3e cas : θ ≡ nπ [π]  
 cosn(θ/2n) < 0  
 |T1| = -2ncosn(θ/2n)  
 un argument : π + θ/2  
  
1 (=ei0) + ei(2kπ+θ)/2n = 2cos((2kπ+θ)/2n)ei(2kπ+θ)/2n  
  
Pourquoi alignés ?   
aucune idée



**Exercice 21**

n >= 1  
x € Rn  
  
x est dite primitive si  
V y € Rn, il existe k € Z, y = xk  
Ex : ωn = e2iπ/n en est une  
 Rn = {ωnk, 0 <= k <= n-1}  
(i) x primitive  
(ii) il existe l € Z, x = e2ilπ/n PGCD(l, n) = 1  
(ii) => (i)  
Soit Z dans Rn  
On cherche k dans Z tq  
z = xk  
On veut mq toute racine nieme de l’unité est une puissance ce x. Il suffit de mq ωn est une puissance de x puisque toute racine nieme de l’unité est une puissance de ωn  
Mq ωn = e2iπ/n est une puissance de x  
Bezout :  
1 = ul + vn  
2π/n = 2πul/n + 2πv  
ωn = ei2π/n = ei2πul/nei2πv = xu  
  
(i) = (ii)  
On suppose que x est primitive  
C’est-à-dire que toute racine nieme de l’unité est une puissance de x ce qui équivaut à dire que ωn est une puissance de x puisque toute racine nieme de l’unité est une puissance de ωn  
On cherche l dans Z tq  
x = e2ilπ/n PGCD(l, n) = 1  
x € Rn donc  
Il existe k € {0, …, n – 1},  
(1) x = ωnk = e2iπk/nx primitive donc  
(2) il existe m € Z, ωn = xm  
e2iπ/n = ωn = xm = e2iπkm/n  
On en déduit que 2π/n ≡ 2πkm/n [2π]  
Il existe v € Z, 2π/n = 2πkm/n + 2πv  
1 = km + nv => PGCD(k, n) = 1

**Exercice 21**

m, n >= 1

1. n | m => Rn c Rm  
   Soit z dans Rn : zn = 1  
   Mq z € Rm  
   Mq zm = 1  
   zm = (zn)m/n = 1
2. Rn Rm = RPGCD(m, n)=dc  
   Soit z dans Rn Rm  
   Mq z € Rd  
   dZ = mZ + nZ  
   d = mu + nv  
   Zd = (Zm)u \* (Zn)v = 1  
     
   1 car Z € Rm 1 car Z € Rn  
     
   Soit z dans Rd  
   Mq z € Rn Rm  
   d | m => Rd c Rm  Rd c Rm Rn  
   d | n => Rd c Rn



**Exos pour le DST**

23 (Bezout, dur samer)  
24  
30  
31 1)  
32 1)

**Exercice 32**

f : C \ {-1} --> C  
 z --> (z – 1)/(z + 1)

1. Mq V z € C \ {-1}, (z – 1)/(z + 1) =/ 1  
   Par l’absurde : (z – 1)/(z + 1) = 1  
   z – 1 = z + 1  
   -1 = 1 NON
2. f : C \ {-1} --> C \ {-1}  
    z --> (z – 1)/(z + 1)  
   Mq f est bijective et déterminer sa bijection réciproque  
   Soit w dans C \ {-1}  
   f(z) = w  
   z € C \ {-1}  
   f(z) = (z – 1)/(z + 1) = w  
   z = w(z + 1) + 1  
   z = wz + w + 1  
   z – wz = w + 1  
   z(w - 1) = w + 1  
   z = (w + 1)/(w – 1)  
   Ainsi, si z = (w + 1)/(w – 1) est l’unique solution complexe de f(z) = w  
   Comme (1 + w)/(1 – w) =/ -1, l’équation admet une unique solution donnée par   
   z = (w + 1)/(w – 1)  
     
   f : C \ {-1} --> C \ {1}  
    z --> (z – 1)/(z + 1)  
   f-1 : C \ {1} --> C \ {-1}  
    w --> (1 + w)/(1 – w)